

ویژه امتحانات پایانی

مسائل برای حل



این آخرین بخش از «مسائل برای حل» در سال تحصیلی ۱۳۹۵-۹۶ است. بنابراین تصمیم گرفتیم به روال سال‌های قبل، در این شماره مسائل امتحانات نهایی سال گذشته (برای پایه سوم ریاضی) و نمونه سؤال پایانی امتحانات درس‌های ریاضی و هندسه پایه دهم را همراه با راه حل آن‌ها بیاوریم.

۵. نشان دهید: $(m, n \in N, a > 0) \sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$

۶. کسر $\frac{x^5 - 13x^3 + 36x}{x^4 - 6x^2}$ را ساده کنید.

۷. در یک مهمنانی عده‌ای شرکت داشتند و همه با هم دست دادند و معلوم شد، ۲۱ بار عمل دست دادن انجام شده است. تعداد افراد شرکت‌کننده در مهمنانی را به دست آورید.

۸. یک تولیدکننده اسباب‌بازی نوعی اسباب‌بازی را که قیمت تمام شده آن ۳۰۰۰ تومان است، ۶۰۰۰ تومان می‌فروشد و با این قیمت، در هر ماه ۱۰۰۰ عدد از آن را می‌تواند بفروشد. اگر به ازای هر ۲۰۰ تومان تخفیف، فروش ماهانه او ۱۰۰ واحد بیشتر شود، او چه قیمتی برای اسباب‌بازی بگذارد تا حداکثر سود را ببرد؟

۹. به ازای چه مقادیر m نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{mx^r + mx + 1}{x^r + 1}$ همواره بالای محور x هاست؟

۱۰. نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} -x^r + 1 & x > 0 \\ x + 2 & x \leq 0 \end{cases}$ را رسم کنید و دامنه و برد f را مشخص کنید. همچنین حاصل $(f(f(f(x))))$ را به دست آورید.

۱۱. ضابطه تابع خطی g را به گونه‌ای به دست آورید که نیم‌ساز ناحیه اول را در نقطه‌ای به طول ۲ و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۱- قطع کند.

۱۲. از روی نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^r$ نمودار تابع با ضابطه $g(x) = x^r - x$ را رسم کنید.

امتحان پایانی درس ریاضی (۱) – پایه دهم

۱. از ۳۰ نفر دانش‌آموزان یک کلاس، ۱۶ نفر عضو انجمن ریاضی، ۱۲ نفر عضو انجمن فیزیک و ۶ نفر عضو هیچ‌یک از آن‌ها نیستند.

(الف) چند نفر عضو هر دو انجمن هستند؟

(ب) چند نفر فقط عضو انجمن فیزیک هستند؟

(ج) چند نفر فقط عضو انجمن ریاضی هستند؟

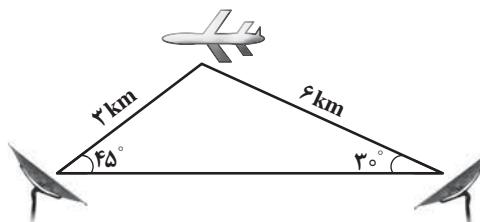
۲. یک دنباله هندسی را به گونه‌ای تشكیل دهید که حاصل ضرب جملات چهارم و پنجم آن 3200 و جمله سوم آن 20 باشد.

۳. یک هواپیما از دو ایستگاه رادار با زاویه‌های 30° و 45° رؤیت می‌شود.

اگر هواپیما از ایستگاه دورتر به فاصله $7km$ باشد، مطلوب است تعیین:

(الف) فاصله هواپیما از ایستگاه نزدیک‌تر

(ب) فاصله دو ایستگاه رادار از یکدیگر.



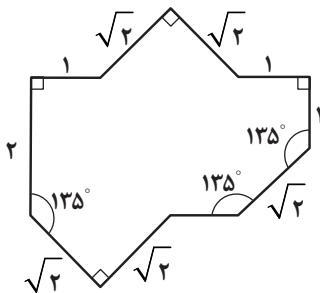
۴. برای زاویه α ، با فرض معنی‌دار بودن کسرها، ثابت کنید:

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \cot \alpha}{\cos \alpha}$$

بزرگتر مثلث چه فاصله‌ای دارد؟

۱۱. مساحت چندضلعی زیر را بدست آورید.

(زوایای داخلی چندضلعی همگی 90° ، 135° و 225° هستند).



۱۲. خط d در نقطه A بر صفحه P عمود است و خط d' در نقطه B خط d را قطع کرده و بر آن عمود است. اگر C نقطه‌ای در صفحه P باشد، دو خط d و AC نسبت بهم چه وضعی دارند و چرا؟

۱۳. قاعده هرمی مثلث ABC و رأس آن نقطه O است. اگر صفحه P بر ارتفاع OH از هرم عمود باشد، سطح مقطع حاصل از برخورد صفحه P و هرم چه شکلی است؟ اگر مساحت این سطح مقطع یک نهم مساحت مثلث ABC باشد، نقطه برخورد آن با OH را به نسبتی تقسیم می‌کند؟

۱۴. مربعی به ضلع a را یکبار حول قطر آن و بار دیگر حول ضلع آن دوران داده‌ایم. حجم شکل حاصل در مرتبه اول چند برابر حجم شکل دیگر است؟

امتحان پایانی درس هندسه (۲) – سوم ریاضی

۱. (الف) یک مثلث متساوی‌الاضلاع را در نظر بگیرید. وسط ضلع‌های آن را بیابید و بهم وصل کنید.

(ب) سه مثلثی را که در گوش‌های ایجاد می‌شوند، نگه دارید و مثلث میانی را با سیاه کردن حذف کنید.
این فرایند را روی سه مثلث دیگر تکرار کنید.

(ج) اگر مساحت مثلث در مرحله صفر برابر ۱ باشد، مساحت باقی‌مانده را در مراحل بعدی با استفاده از استدلال استقرایی بدست آورید و جدول زیر را کامل کنید.

n	...	۲	۱	۰	مرحله
مساحت باقی‌مانده	...	?	?	۱	

۲. با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید، مجموع فاصله‌های هر نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن مقداری ثابت است. سپس آن مقدار ثابت را بدست آورید.

۳. قضیه: ثابت کنید در هر مثلث، مجموع طول‌های هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگ‌تر است.

۱۳. با حروف کلمه «گل بیرا» چند کلمه چهار حرفی بدون نقطه می‌توان نوشت؟

۱۴. مجموعه $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ چند زیرمجموعه سه‌عضوی دارد که شامل a و فاقد f باشد؟

۱۵. از یک کیسه شامل ۳ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز، ۲ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که:
(الف) هیچ‌یک از دو مهره سفید نباشد.
(ب) دو مهره همنگ نباشند.

۱۶. نوع هر یک از متغیرهای زیر را به‌طور دقیق مشخص کنید:

(الف) تعداد تلفن‌های زده شده به یک مرکز در یک شب‌روز.

(ب) گروه خون دانش‌آموزان یک کلاس درس.

(ج) مقدار آب مصرف شده در روز توسط اعضای یک خانواده.

(د) گروه سنی ساکنان یک ساختمان مسکونی.

امتحان پایانی درس هندسه (۱) – پایه دهم

۱. (الف) طریقه‌رسم عمودمنصف یک پاره‌خط را توضیح دهید.

(ب) طریقه‌رسم خط راستی عمود بر یک خط از یک نقطه خارج از آن را شرح دهید.

۲. به کمک استدلال استنتاجی ثابت کنید، سه ارتفاع هر مثلث در یک نقطه هم‌رساند.

۳. ثابت کنید در هر مثلث اندازه لاقل یکی از زوایای داخلی کوچک‌تر یا مساوی 60° است.

۴. در یک مثلث به اضلاع ۱۰، ۱۷ و ۲۱ واحد، اندازه کوتاه‌ترین ارتفاع مساوی ۸ واحد است. اندازه‌های دو ارتفاع دیگر مثلث را بیابید.

۵. در مثلث ABC، میانه AM را رسم می‌کنیم و از نقطه دلخواه D (بین M و C) خطی موازی AM می‌کشیم تا AC را در E و امتداد AB را در F قطع کند. ثابت کنید:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AF}{AE}$$

۶. در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، ارتفاع رأس A روی وتر BC دو پاره‌خط به طول‌های ۴ و ۹ سانتی‌متر جدا کرده است. طول‌های اضلاع زلزله‌قائمه مثلث را بدست آورید.

۷. در مثلث ABC، میانه AM رسم شده است و نیمسازهای زاویه‌های AB و AC و AMB و AMC در نقاط P و Q قطع کرده‌اند. ثابت کنید: $PQ \parallel BC$.

۸. ثابت کنید هر ذوزنقه‌ای که دو قطر آن برابر باشند، متساوی‌الساقین است.

۹. ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه، میانه وارد بر وتر نصف وتر است.

۱۰. درون مثلثی به اضلاع ۶، ۸ و ۱۰ واحد، نقطه‌ای داریم که از دو ضلع کوچک‌تر مثلث به فاصله‌های ۱ و ۲ واحد قرار دارد. این نقطه تا ضلع

۱۰. مقدار x را چنان بیابید که اندازهٔ مماس مشترک داخلی دو دایره به ساعهای ۲ و ۳ و خط‌المرکزین $d = 5x - 8$ باشد.

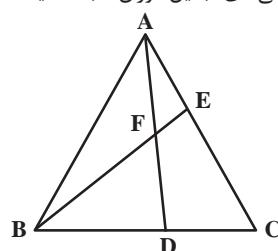
۱۱. واژه‌های زیر را تعریف کنید:
 (الف) چندضلعی محاطی
 (ب) اپیزومتری
 (ج) دو خط متناظر

۱۲. تحت یک انتقال نقطهٔ (۱,-۳) روی نقطهٔ (-۲,۱) تصویر شده است، ضایعهٔ انگاشت انتقال را بنویسید.

۱۳. نقاط A(۱,۲), B(۰,۱), C(۱,۰) و D(۲,۱) رأس‌های یک مربع هستند.
 (الف) مربع ABCD و تصویر مجانت آن را با در نظر گرفتن (۰,۰,۰) به عنوان مرکز تجانس و عدد ۲ به عنوان مقیاس تجانس رسم کنید.
 (ب) نسبت مساحت تصویر مربع ABCD را به مساحت مربع ABCD بنویسید.
 (ج) این تجانس انقباض است یا انبساط؟

۱۴. تحت یک بازتاب، تصویر خط $x+y+3=0$ ، خط $x+y=0$ است، معادلهٔ محور تقارن را بنویسید.

۱۵. مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است و $.BD=CE$
 با استفاده از ویژگی‌های تبدیل دوران، ثابت کنید: $AD=BE$.



۱۶. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید:
 (الف) اگر دو نقطهٔ متمایز از خطی، در یک صفحه باشند، آن خط به تمامی در آن صفحه قرار می‌گیرد.

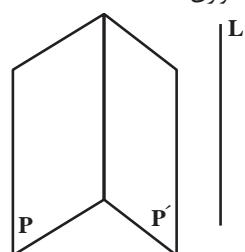
(ب) اگر سه خط L_1 , L_2 و L_3 دو به دو متقاطع باشند، این سه خط لزوماً در یک صفحه قرار دارند.

(ج) قضیهٔ تالس در فضای یک قضیهٔ دو شرطی است.

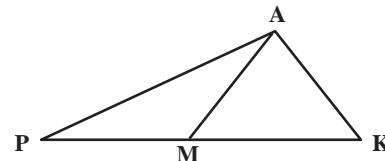
(د) در فضای اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند، لزوماً دیگری را هم قطع می‌کند.

(ه) اگر خطی بر صفحه‌ای عمود باشد، بر خط از آن صفحه نیز عمود است.

۱۷. قضیه: ثابت کنید اگر خطی با دو صفحهٔ متقاطع، موازی باشد، آن‌گاه با فصل مشترک آن‌ها موازی است.



۱۸. در مثلث PAK، نقطهٔ M روی ضلع PK قرار دارد.
 ثابت کنید اگر: $PM=AK$ ، آن‌گاه: $AP > MK$.



۱۹. مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه را پیدا کنید که از خط داده شده L به فاصله $\frac{1}{2}$ باشد.

۲۰. در سؤالات زیر گزینهٔ درست را انتخاب کنید:

(الف) مرکز دایرةٌ محاطی داخلی هر مثلث، محل برخورد آن مثلث است.

(۱) ارتفاع‌های اضلاع

(۲) عمودمنصف‌های اضلاع

(۳) نیمسازهای زاویه‌های درونی

(۴) میانه‌های اضلاع

(ب) مرکز دایرةٌ محیطی هر مثلث، محل برخورد آن مثلث است.

(۱) ارتفاع‌های اضلاع

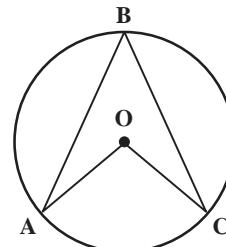
(۲) عمودمنصف‌های اضلاع

(۳) نیمسازهای زاویه‌های درونی

(۴) میانه‌های اضلاع

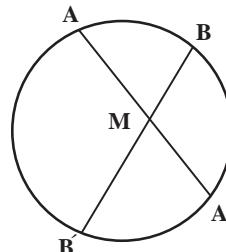
۲۱. قضیه: ثابت کنید اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی، برابر با نصف کمان رویه‌روی آن است.

۲۲. در دایرةٌ به مرکز O، اگر $A\hat{B}C = (\alpha + 12)^\circ$ و $A\hat{O}C = (3\alpha + 12)^\circ$ باشد، مقدار α و اندازهٔ زاویهٔ مرکزی AOC و محاطی ABC را محاسبه کنید.



۲۳. قضیه: از نقطهٔ M واقع در داخل دایرةٌ C دو وتر دلخواه AA' و BB' رسم شده‌اند، ثابت کنید:

$$MA \times MA' = MB \times MB'$$



۱۰. اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، با رسم نمودار ون، پیشامد «تنها یکی از دو پیشامد A یا B اتفاق بیفتد.» را نمایش دهید.

۱۱. سکه‌ای را یکبار پرتاب می‌کنیم. اگر رو ظاهر شد، آن‌گاه تاس را می‌ریزیم. در غیر این صورت یکبار دیگر سکه را می‌اندازیم.
الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی چند عضو دارد؟
ب) پیشامد A که در آن عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد یا سکه پشت بیاید را با اعضا بنویسید.

۱۲. دو تاس را با هم می‌ریزیم. احتمال آن را بیابید که مجموع اعداد ظاهر شده روی تاس‌ها برابر ۶ شود.

۱۳. در ظرفی ۷ مهره قرمز و ۴ مهره سفید داریم. به تصادف ۲ مهره با هم بیرون می‌آوریم. احتمال آنکه دو مهره هم‌رنگ باشند را محاسبه کنید.

۱۴. سکه‌ای را ۲۰ بار می‌اندازیم. احتمال آنکه ۸ بار رو ظاهر شود را بیابید.

۱۵. سه اسب a، b و c با هم مسابقه می‌دهند. اسب‌های a و c دارای احتمال بردن مساوی هستند و شانس b، دو برابر شانس بردن a است. احتمال آنکه دو اسب a یا b برند را بدست آورید.

۱۶. دو عدد مانند x و y به تصادف از بازه $[4, 5]$ انتخاب می‌شوند. احتمال آنکه $|x-y| < 3$ باشد را محاسبه کنید.

۱۷. عددی را به تصادف از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 40\}$ انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه عدد انتخابی بر ۳ بخش‌پذیر باشد، ولی بر ۵ بخش‌پذیر نباشد را بیابید.

امتحان پایانی درس حسابان – سوم ریاضی

۱. در چند جمله‌ای $p(x)=x^3+ax^2+x+b$ مقدار a و b را چنان بیابید که باقی‌مانده تقسیم آن بر $x-1$ برابر ۴ و بر $x+2$ بخش‌پذیر باشد.

۲. اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2-2x-1=0$ باشند، معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{1}{\alpha+1}$ و $\frac{1}{\beta+1}$ باشند.

۳. نامعادله $\sqrt{x+1} \leq |x-1|$ را به روش هندسی حل کنید.

۴. درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید:

الف) چندجمله‌ای x^n-a^n بر $x-a$ بخش‌پذیر است.

ب) بیشترین مقدار تابع $f(x)=-\frac{x^3}{2}+2x$ برابر 20 است.

ج) وارون تابع $f(x)=\frac{y}{x-3}$ برابر $g(x)=\frac{y}{x}$ است.

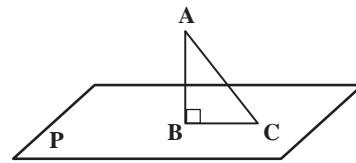
د) تابع $f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$ با تابع $g(x)=\sin x$ مساوی است.

۵. نمودار تابع زیر را رسم کنید و به کمک آن برد تابع را مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 0 \\ 2 & 0 \leq x \leq 2 \\ x - 1 & x > 2 \end{cases}$$

۱۸. از نقطه A روی خط L، صفحه‌ای بر خط L عمود کنید. (رسم شکل و توضیح روش رسم الزامي است.)

۱۹. ثابت کنید که فاصله یک نقطه از یک صفحه، کوتاه‌ترین فاصله بین آن نقطه تا نقاط آن صفحه است.



امتحان پایانی درس جبر و احتمال – سوم ریاضی

۱. در هر مورد نوع استدلال ریاضی را مشخص کنید.

الف) روش نتیجه‌گیری با استفاده از حقایقی که درستی آن‌ها را پذیرفت‌هایم.

ب) روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه محدودی از مشاهدات است.

ج) روش اثباتی که در آن با استفاده از درستی حکم به یک رابطه بدیهی یا فرض مستله می‌رسیم.

۲. با استفاده از اصل استقراء ثابت کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)^{-2} = \frac{n(n+1)}{2}, \quad (n \in \mathbb{N})$$

۳. حکم درست را اثبات کنید و برای رد حکم نادرست مثال نقض ارائه دهید.

الف) حاصل ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچکتر یا مساوی نصف مجموع مربع‌های آن‌هاست.

ب) حاصل جمع دو عدد گنج عددي گنج است.

۴. شرکت‌کنندگان در یک آزمون ریاضی ۳۰ نفر هستند. حداقل چند

شرکت‌کننده وجود دارند که حرف اول نام و نام خانوادگی آن‌ها به زبان فارسی یکسان است؟ دلیل ارائه کنید.

۵. جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید.

الف) مجموعه $\{\emptyset, \{\}\}$ دارای زیرمجموعه است.

ب) دو زوج مرتب $(y^{-1}, y+2)$ و $(x+2, x)$ با هم برابرند. مقدار y برابر با است.

ج) دو مجموعه $A=\{-1, 0, 1, 2\}$ و $B=\{-3, -2, 1, 2, 3\}$ را در نظر بگیرید.

مجموعه $A \times B$ دارای عضو است.

۶. اگر A و B دو مجموعه باشند، به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

۷. نمودار این رابطه را رسم کنید:

$$A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \leq 1, y \geq |x|\}$$

۸. چهار افزار متفاوت برای مجموعه $\{1, 2, 3\}$ A= بنویسید.

۹. رابطه R بر روی \mathbb{R}^2 به صورت روبرو تعریف شده است:

$$(a, b) R (c, d) \Leftrightarrow a=c$$

الف) ثابت کنید R تعددی است.

ب) رابطه R رابطه‌ای همارزی است. کلاس همارزی $\{(1, 2)\}$ را بنویسید.

۱۲. حد های زیر را حساب کنید.
- (الف) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x + 4}{2x^3 - 2}$
- (ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2 2x}{1 - \cos x}$
۱۳. پیوستگی تابع $f(x) = \sqrt{1-x}$ را در نقطه $a=1$ بررسی کنید.
۱۴. با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در نقطه $a=0$ به دست آورید.
۱۵. مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق لازم نیست.)
- (الف) $f(x) = (x^7 - x^5 - 1)^5$
- (ب) $g(x) = \frac{x^4 - \sin x}{1 + \cos x}$
- (ج) $h(x) = (x - \sqrt{x} + 5)(\tan^{-1} x)$
۱۶. نقاطی از نمودار تابع $f(x) = x^7 - 2x^6 - 6x^5$ را معین کنید که مماس بر منحنی در این نقاط موازی نیم ساز ربع اول و سوم باشد.

۶. اگر $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ دو تابع باشند:
- (الف) دامنه تابع fog را به دست آورید.
- (ب) ضابطه تابع fog را بنویسید.
- (ج) مقدار $(g-f)(2)$ را حساب کنید.
۷. زوج یا فرد بودن تابع $f(x) = \frac{x^7 - \cos x}{|x|}$ را بررسی کنید.
۸. درستی اتحاد روبه رو را ثابت کنید:
- $$\cos^3 \alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$
۹. معادله $2 \sin^3 x - \sin x = 0$ را حل کنید.
۱۰. مقدار $\cos(\sin^{-1}(\frac{3}{5}))$ را حساب کنید.
۱۱. آیا تابع $f(x) = \frac{x}{|x|}$ در $x=0$ حد دارد؟ چرا؟

یک خبر مسرت بخش

تولد یک مجله ریاضی الکترونیکی

عنوان برخی مقالات شماره نخست مجله عبارت اند از: دنباله حسابی (مریم خورشید)، عمامی سه ماهیگیر با انصاف (عباس قلعه پور)، تفکر ریاضی چیست؟ (هوشنگ شرقی)، نوار موبیوس (معصومه قاسمی)، اثبات چند نامساوی مثلثاتی (عنایت الله راستی زاده)، اصل استقرای ریاضی (فرزاد جوادی)، اعداد مختلف علیرضا وحیدی).

آدرس ایمیل و وبلاگ مجله به شرح زیر است:

manshoor.mathmag@yahoo.com

www.manshoormag.blogfa.com



نخستین شماره مجله الکترونیکی «منشور» در زمستان ۱۳۹۵ منتشر شد. این مجله که در شهر ارومیه (استان آذربایجان غربی) توسط جمعی از دیبان ریاضی و استادان دانشگاه انتشار می‌یابد، روی لوح فشرده عرضه می‌شود و نخستین شماره آن به صورت رایگان در ۴۰۰ نسخه به دانشآموzan، دانشجویان و دیبان ریاضی آن شهر تقدیم شده است. قرار است که از شماره دوم به بعد آن به قیمت ۲۰۰۰ تومان توزیع شود. مدیر مسئول این مجله (که فصلنامه ریاضیات استان آذربایجان غربی خوانده شده) آقای دکتر علیرضا وحیدی و سردبیر آن آقای عباس قلعه پور اقدم است که پیش از این مقالاتی از ایشان را در برهان دیده ایم.

اعضای هیئت تحریریه «مجله برهان متوسطه ۲»، ضمن ابراز خوشحالی از این خبر مسرت بخش، برای دست اندر کاران این نشریه ریاضی آرزوی توفیق دارند و به همه دانشآموzan و علاقه مندان رشته ریاضی، تهیه و مطالعه این مجله را توصیه می‌کنند.